Huiswerk voor *Wiskundige Technieken 3* (WISN202). A. Henriques, Maart 2011.

Opgave 1 Los de volgende differentiaalvergelijking

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} f(x) = \dfrac{f(x)}{2+2x} \\ f(0) = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

met de hulp van mechtreeksen op:
1) Wat is de machtreeksoplossing van $(*)$?
2) Wat is de functievoorschrift van de functie f die aan $(*)$ voldoet?

Opgave 2 Zij $\mathsf{Pol}_{\leq 3}$ de ruimte van polynomen van graad ≤ 3.
De operator $F : \mathsf{Pol}_{\leq 3} \to \mathsf{Pol}_{\leq 3}$ is gegeven door

$$F(f) := f + xf' + f'''.$$

1) Geef de matrix van F ten opzichte van de basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ van $\mathsf{Pol}_{\leq 3}$.
2) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van F.

Opgave 3 Juist of fout (met uitleg)?
- $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f(0) = 0$ en $f(1) = 1\}$ is een vector ruimte.
- De afbeelding $F : f(x) \mapsto f(x^2)$ is lineair.
- De functies e^x, $\sinh(x)$, en $\cosh(x)$ zijn lineair onafhankelijk.

Opgave 4 Zij $V := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f(x) = f(x+1)\}$.
Bereken het spectrum van de operator $D : V \to V$, $f \mapsto f''$.

Opgave 5 Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$, waarvan de coefficienten a_n zijn gegeven door

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ \dots \ \cdot (2n-1)}{n!}.$$

Opgave 6 De Fourier coefficienten van een 2π-periodieke functie f zijn gegeven door de formule $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$. Zij voldoen aan

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Bereken de Fourier coefficienten van de 2π-periodieke functie