0.1

Opgave

Bepaal de convergentiestralen van de volgende machtreeksen:

1. $\sum n!z^n$;
2. $\sum \frac{n!}{(2n)!}z^n$;
3. $\sum \frac{3^n z^n}{n!}$;
4. $\sum \frac{n^n z^n}{n!}$.

Uitwerking

1. Zij $a_n = n!$, dan
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$
dus $R = 0$.
2. Zij $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$, dan
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!/(2n+2)!}{n!/(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(2n+1)} = 0,$$
dus $R = \infty$.
3. Zij $a_n = \frac{3^n}{n!}$, dan
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}/(n+1)!}{3^n/n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0,$$
dus $R = \infty$.
4. Zij $a_n = \frac{n^n}{n!}$, dan
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp(n\log(1+\frac{1}{n}))\\ &= \exp(\lim_{n\to\infty} n\log(1+\frac{1}{n}))\\ &= \exp(\lim_{x\downarrow 0}\frac{\log(1+x)}{x}) = e,\end{aligned}$$
dus $R = 1/e$.

   De convergentiestraal kan ook verkregen worden door gebruik te maken van de formule van Stirling .

0.2

Opgave

Bepaal voor de volgende machtreeksen de convergentiestraal R, en bepaal de som voor alle punten z met $|z| < R$:

1. $\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^{2n}$;
2. $\sum_{n\geq 1}(-1)^n n^2 z^n$;
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n} z^n$;
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{n+1} z^n$.

Uitwerking

De convergentiestraal van al deze machtreeksen is 1. Voor **b**, **c** en **d** volgt dit eenvoudigweg door het quotiënt van opeenvolgende coefficienten uit te rekenen, hiervan de absolute waarde te bepalen en aan te tonen dat het resultaat naar 1 gaat als $n \to \infty$. Oftewel: pas stelling 1.4.b toe. Dit werkt niet voor **a** omdat de rij van coëfficiënten van de vorm $(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots)$ is. Ieder van deze coëfficiënten heeft echter een absolute waarde kleiner of gelijk aan 1 en dus heeft deze reeks een convergentiestraal die minstens zo groot is als de convergentiestraal van de geometrische reeks, welke 1 is. En als je $z = 1$ invult, convergeert deze reeks duidelijk niet absoluut. Conclusie: bij **a** is $R = 1$.

We kijken hier verder niet naar het gedrag op de convergentiecirkel.

Voor het bepalen van de waarden van de oneindige sommen maken we gebruik van de meetkundige reeks: $g(z) := \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ voor $|z| < 1$.

1. $\frac{1}{1+z^2} = g(-z^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$.

2. Ga zelf na dat $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z\frac{d}{dz}(z\frac{d}{dz}g(z)) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$. We concluderen dat $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 z^n = \frac{-z(1-z)}{(1+z)^3}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = \frac{z}{1-z} - \log(1-z)$.

4. $\frac{n^2}{n+1} = n - 1 + \frac{1}{n+1}$ dus

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} z^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^n \\
&= z\frac{d}{dz}g(z) - zg(z) - 1 - \frac{\log(1-z)}{z} \\
&= \frac{2z-1}{(1-z)^2} - \frac{\log(1-z)}{z}.
\end{aligned}$$

0.3

Opgave

1. Bepaal de convergentiestraal R van de machtreeks $\sum_{n\geq 0} n(n-1)z^n$.

2. Laat zien dat voor $|z| < R$ geldt $\quad \sum_{n\geq 0} n(n-1)z^n = \dfrac{2z^2}{(1-z)^3}$.

Uitwerking

1. Hier is $a_n = n(n-1)$. Dus

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n(n-1)} = 1$$

   De convergentiestraal is dus 1.

2. We gebruiken de meetkundige reeks: $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} n(n-1)z^n &= z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)\right) - z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) \\
&= z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right) - \frac{z}{(1-z)^2} \\
&= \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} - \frac{z}{(1-z)^2} \\
&= \frac{2z^2}{(1-z)^3}
\end{aligned}$$

0.4

Opgave

Gebruik de binomium formule om de eerste vijf termen te vinden van de Taylorreeks rond 0 van de funktie $\dfrac{1}{\sqrt{1+z}} = (1+z)^{-\frac{1}{2}}$.

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+z}} &= (1+z)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \binom{-\frac{1}{2}}{0} + \binom{-\frac{1}{2}}{1} z + \binom{-\frac{1}{2}}{2} z^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3} z^3 + \binom{-\frac{1}{2}}{4} z^4 + \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{2}z + \frac{3}{8}z^2 - \frac{5}{16}z^3 + \frac{35}{128}z^4 + \ldots
\end{aligned}
$$

De coëfficiënten hebben we berekend met de definitie

$$\binom{r}{n} := \frac{r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot (r-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$$

0.5

Opgave

1. Bewijs dat voor alle $r, s \in \mathbb{R}$ en alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ geldt
$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k}.$$
Aanwijzing: Ga eerst na dat $(1+z)^{r+s} = (1+z)^r(1+z)^s$ voor elke $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < 1$. Gebruik vervolgens de formule voor het produkt van twee machtreeksen.

2. Laat zien dat voor alle m, $n \in \mathbb{Z}$ met m, $n \geq 0$ geldt
$$\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}.$$

Uitwerking

1. Eerst merken we op dat volgens de definities
$$\begin{aligned}(1+z)^{r+s} &= e^{(r+s)\log(1+z)} = e^{r\log(1+z)+s\log(1+z)} = e^{r\log(1+z)}e^{s\log(1+z)} \\ &= (1+z)^r(1+z)^s.\end{aligned}$$
We weten:
$$\begin{aligned}(1+z)^{r+s} &= \sum_{n\geq 0} \binom{r+s}{n} z^n \\ (1+z)^r &= \sum_{n\geq 0} \binom{r}{n} z^n \\ (1+z)^s &= \sum_{n\geq 0} \binom{s}{n} z^n\end{aligned}$$
We weten ook dat voor het produkt van twee machtreeksen geldt
$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$$
met voor elke n
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$
Dus is in het bijzonder
$$(1+z)^r(1+z)^s = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} z^n$$
Anderzijds is
$$(1+z)^r(1+z)^s = (1+z)^{r+s} = \sum_{n\geq 0}\binom{r+s}{n} z^n$$
Omdat twee machtreeksen alleen maar gelijk zijn als alle overeenkomstige coëfficiënten gelijk zijn, kunnen we nu concluderen
$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k}.$$

2. We passen het voorgaande toe met $r = 1$ en $s = m$ en bedenken dat $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = 0$ als $k > 1$, terwijl $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$. Het resultaat is:

$$\begin{pmatrix} m+1 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n-1 \end{pmatrix}.$$

0.6

Opgave

Neem voor V de lineaire ruimte van alle rijen $\{a_n\}_{n\geq 0}$ complexe getallen. Neem

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \{a_n\}_{n\geq 0} \in V \;\middle|\; \text{de reeks } \sum_{n\geq 0} a_n \text{ convergeert} \right\} \\ W_2 &= \left\{ \{a_n\}_{n\geq 0} \in V \;\middle|\; \text{de reeks } \sum_{n\geq 0} |a_n| \text{ convergeert} \right\} \\ W_3 &= \left\{ \{a_n\}_{n\geq 0} \in V \;\middle|\; \text{de reeks } \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 \text{ convergeert} \right\} \end{aligned}$$

1. Laat zien dat W_1, W_2, W_3 lineaire deelruimtes van V zijn.
2. Laat zien dat $W_2 \subset W_1$. Geef een voorbeeld van een rij die in W_1 zit maar niet in W_2.
3. Laat zien dat $W_2 \subset W_3$. Geef een voorbeeld van een rij die in W_3 zit maar niet in W_2.

Uitwerking

1. We gaan uit van het gegeven dat V een lineaire ruimte is. Om na te gaan dat $W \subset V$ een lineaire deelruimte is hoeven we dan alleen nog te controleren dat

   - $0 \in W$
   - als $v, w \in W$ dan ook $v + w \in W$
   - als $v \in W$ en $\lambda \in \mathbb{C}$ dan ook $\lambda v \in W$.

   Voor W_1:

   Duidelijk is voor de rij $\{a_n\}_{n\geq 0}$ met alle $a_n = 0$ de reeks $\sum_{n\geq 0} a_n$ convergent.

   Als beide reeksen $\sum_{n\geq 0} a_n$ en $\sum_{n\geq 0} b_n$ convergeren, dan is ook de reeks $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)$ convergent.

   Als de reeks $\sum_{n\geq 0} a_n$ convergeert en $\lambda \in \mathbb{C}$ dan is ook de reeks $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n$ convergent.

   Voor W_2:

   Duidelijk is voor de rij $\{a_n\}_{n\geq 0}$ met alle $a_n = 0$ de reeks $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ convergent.

   Als beide reeksen $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ en $\sum_{n\geq 0} |b_n|$ convergeren, dan is ook de reeks $\sum_{n\geq 0}(|a_n| + |b_n|)$ convergent. Uit $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$ (driehoeksongelijkheid) en het majorantiekenmerk volgt dan dat ook de reeks $\sum_{n\geq 0} |a_n + b_n|$ convergeert.

   Als de reeks $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ convergeert en $\lambda \in \mathbb{C}$ dan is ook de reeks $\sum_{n\geq 0} |\lambda a_n|$ convergent (N.B. $|\lambda||a_n| = |\lambda a_n|$).

   Voor W_3:

   Duidelijk is voor de rij $\{a_n\}_{n\geq 0}$ met alle $a_n = 0$ de reeks $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2$ convergent.

   Als beide reeksen $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2$ en $\sum_{n\geq 0} |b_n|^2$ convergeren, dan is ook de reeks $\sum_{n\geq 0}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$ convergent. Voor alle reële getallen x en y is $(x+y)^2 \leq (x+y)^2 + (x-y)^2 = 2x^2 + 2y^2$. Dus is $|a_n + b_n|^2 \leq (|a_n| + |b_n|)^2 \leq 2(|a_n|^2 + |b_n|^2)$. Uit het majorantiekenmerk volgt nu dat ook de reeks $\sum_{n\geq 0} |a_n + b_n|^2$ convergeert.

   Als de reeks $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2$ convergeert en $\lambda \in \mathbb{C}$ dan is ook de reeks $\sum_{n\geq 0} |\lambda a_n|^2$ convergent.

2. Iedere absoluut convergente reeks is convergent. Hieruit volgt $W_2 \subset W_1$.

   De reeks $\sum_{n\geq}(-1)^n n^{-1}$ is een bekend voorbeeld van een convergente reeks die niet absoluut convergent is. Dus is de rij $\{(-1)^n n^{-1}\}_{n\geq 1}$ wel een element van W_1 maar niet van W_2.

3. Neem $\{a_n\} \in W_2$. Omdat de reeks $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ convergeert, is $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Er is dus een N zo dat voor alle $n > N$ geldt $|a_n| < 1$. Voor alle $n > N$ is dan $|a_n|^2 < |a_n|$. Uit het majorantiekenmerk volgt dan dat ook de reeks $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2$ convergeert. Kortom $\{a_n\} \in W_3$.

   De rij $\{n^{-1}\}_{n\geq 1}$ is wel een element van W_3 (want $\sum_{n\geq 1} n^{-2}$ convergeert) maar niet van W_2 (want $\sum_{n\geq 1} n^{-1}$ divergeert).

0.7

Opgave

Neem de lineaire ruimte $C^0(\mathbb{R})$ bestaande uit alle continue reëelwaardige funkties op $\mathbb{R}$. Neem

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}) \,\middle|\, \text{de integraal } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \ \text{ convergeert} \right\} \\ W_2 &= \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}) \,\middle|\, \text{de integraal } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \ \text{ convergeert} \right\} \\ W_3 &= \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}) \,\middle|\, \text{de integraal } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2dx \ \text{ convergeert} \right\} \end{aligned}$$

1. Laat zien dat W_1, W_2, W_3 lineaire deelruimtes van $C^0(\mathbb{R})$ zijn.
2. Laat zien dat $W_2 \subset W_1$. Geef een voorbeeld van een funktie die in W_1 zit maar niet in W_2.
3. Geef een voorbeeld van een funktie die in W_3 zit maar niet in W_2.

   Geef een voorbeeld van een funktie die in W_2 zit maar niet in W_3.

Uitwerking

Het verband tussen deze opgave en de vorige is dat rijen door funkties en reeksen door oneigenlijke integralen zijn vervangen (detail: het gaat hier om tweezijdig oneigenlijke integralen; men moet steeds de convergentie van $\int_{-\infty}^0$ en $\int_0^\infty$ apart onderzoeken). De oplossing van deze opgave lijkt daarom heel sterk op die van de vorige.

1. **Voor W_1:**

   Duidelijk is voor de constante funktie 0 de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} 0dx$ convergent.

   Als $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ en $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ convergeren, convergeert ook $\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)+g(x))dx$.

   Als $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ convergeert en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan convergeert $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda f(x)dx$.

   Voor W_2:

   Duidelijk is voor de constante funktie 0 de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} |0|dx$ convergent.

   Als $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ en $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx$ convergeren, convergeert ook $\int_{-\infty}^{\infty}(|f(x)|+|g(x)|)dx$. De convergentie van $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)+g(x)|dx$ volgt uit de Majorantie Stelling 1.5 en de driehoeksongelijkheid $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$.

   Als $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ convergeert en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan convergeert $\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda f(x)|dx$.

   Voor W_3:

   Duidelijk is voor de constante funktie 0 de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} |0|^2dx$ convergent.

   Als $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2dx$ en $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2dx$ convergeren, convergeert ook $\int_{-\infty}^{\infty}(|f(x)|^2+|g(x)|^2)dx$. De convergentie van $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)+g(x)|^2dx$ volgt uit de Majorantie Stelling 1.5 en $|f(x)+g(x)|^2 \leq 2|f(x)|^2+2|g(x)|^2$ (zie vorige opgave).

   Als $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2dx$ convergeert en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan convergeert $\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda f(x)|^2dx$.

2. Absolute convergentie impliceert convergentie. Daarom is $W_2 \subset W_1$.

   De integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ convergeert, maar de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ convergeert niet (dat kun je bijvoorbeeld inzien door op te merken dat voor elk positief geheel getal k de grafiek van $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ op het interval $[k\pi, (k+1)\pi]$ boven de gelijkbenige driehoek met basis $[k\pi, (k+1)\pi]$ en hoogte $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ ligt; daarom is $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{1}{2k+1}$; divergentie van de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ volgt uit de divergentie van de reeks $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k+1}$.

3. Anders dan bij reeksen impliceert convergentie van de integraal $\int_0^\infty |f(x)|dx$ *niet* $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = 0$ (zie voorbeeld hierna). Daarom kunnen we de bewijsmethode van de vorige opgave hier niet overnemen. Sterker nog er geldt in deze opgave geen inclusie $W_2 \subset W_3$.

   Hier is een funktie f die wel in W_2 zit maar niet in W_3:
   - voor ieder positief geheel getal n en voor $x \in [n - \frac{1}{n^3}, n]$ definiëren we $f(x) = n^4x - n^5 + n$
   - voor ieder positief geheel getal n en voor $x \in [n, n + \frac{1}{n^3}]$ definiëren we $f(x) = -n^4x + n^5 + n$
   - voor alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor de voorgaande twee regels nog geen waarde voor $f(x)$ geven definiëren we $f(x) = 0$.

   De grafiek van deze funktie f bestaat uit een reeks van steeds smallere en hogere driehoeken met daartussen intervallen waar de grafiek met de x-as samenvalt.

   Voor $R > 0$ is $\int_0^R |f(x)|dx$ een monotoon stijgende funktie van R die van boven wordt begrensd door de som van de convergente reeks $\sum_{n=1}^\infty n^{-2}$. Dus convergeert de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty |f(x)|dx$. Omdat ten duidelijkste $\int_{-\infty}^0 |f(x)|dx = 0$ is, convergeert dus ook $\int_{-\infty}^\infty |f(x)|dx$. Dit bewijst $f \in W_2$.

   Merk op dat voor ieder positief geheel getal n en voor
   $x \in [n - \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{2n^3}]$ geldt $f(x) \geq \frac{n}{2}$ en dus

$$\int_{n-\frac{1}{n^3}}^{n+\frac{1}{n^3}} |f(x)|^2 dx \geq \int_{n-\frac{1}{2n^3}}^{n+\frac{1}{2n^3}} |f(x)|^2 dx \geq \frac{n^2}{4} \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{4n}$$

   Hieruit zien we dat voor positieve gehele N geldt

$$\int_0^{N+\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

   Omdat de reeks $\sum_{n\geq 1} n^{-1}$ divergeert, divergeren dus ook de integralen $\int_0^\infty |f(x)|^2 dx$ en $\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 dx$. Dit laat zien dat f niet in W_3 zit.

   Evenmin geldt er een inclusie $W_3 \subset W_2$: De funktie $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ zit wel in W_3 maar niet in W_2.

0.8

Opgave

Zij N een positief geheel getal. Zij Pol_N de lineaire ruimte van alle polynomen van graad $\leq N$ met coëfficiënten in $\mathbb{R}$.

1. Laat zien dat $\{1, x, \ldots, x^N\}$ een basis is van Pol_N.

2. Definieer de lineaire afbeelding $D : \mathsf{Pol}_N \to \mathsf{Pol}_N$ door:
   voor $f \in \mathsf{Pol}_N$ is $Df = f'$ de afgeleide van f.

   Geef de matrix van D t.o.v. de basis $\{1, x, \ldots, x^N\}$.

3. Bepaal de eigenwaarden en eigenvektoren van D m.b.v. de matrix uit het vorige onderdeel.

Uitwerking

1. Per definitie wordt ieder polynoom $a_0 + a_1 x + \ldots + a_N x^N$ van graad $\leq N$ volledig vastgelegd door de coëfficiënten $a_0, \ldots, a_N$. In lineaire algebra taal is dit de uitspraak dat $1, x, \ldots, x^N$ een basis is van de lineaire ruimte Pol_N.

2. $D1 = 0$ en $Dx^k = kx^{k-1}$ voor $k \geq 1$. De matrix van D t.o.v. de basis $1, x, \ldots, x^N$ is dus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & N \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

3. Het karakteristieke polynoom van deze matrix is $\lambda^{N+1} = 0$. Daarom is de enige eigenwaarde $\lambda = 0$ (met algebraïsche multipliciteit $N + 1$). De eigenvektoren voldoen aan $f' = 0$, zijn dus constant. Kortom de eigenvektoren van D zijn $a_0 \cdot 1$ met $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$.

0.9

Opgave

Zij Pol_3 de lineaire ruimte van alle polynomen van graad ≤ 3 met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. Neem de operator van Hermite:

$$(D_{\text{Her}}(f))(x) := f''(x) - 2xf'(x) - f(x)$$

1. Laat zien dat als f in Pol_3 zit, dan is ook $D_{\text{Her}}(f) \in \mathsf{Pol}_3$
2. Geef de matrix van D_{Her} t.o.v. de basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ van Pol_3.
3. Bepaal de eigenwaarden en eigenvektoren van de lineaire operator D_{Her} op de lineaire ruimte Pol_3 m.b.v. de matrix uit het vorige onderdeel.

Uitwerking

1. Een basis van Pol_3 is $\{1, x, x^2, x^3\}$. Met de definitie van de operator D_{Her} vinden we

$$\begin{aligned} D_{Her}1 &= -1 \\ D_{Her}x &= -3x \\ D_{Her}x^2 &= 2 - 5x^2 \\ D_{Her}x^3 &= 6x - 7x^3 \end{aligned}$$

   Alle rechterleden liggen in Pol_3. Omdat $\{1, x, x^2, x^3\}$ een basis van Pol_3 is, volgt hieruit $D_{Her}f \in \mathsf{Pol}_3$ voor elke $f \in \mathsf{Pol}_3$.

2. Uit de berekening hierboven volgt dat de matrix van D t.o.v. de basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ is

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

3. Aan de matrix lezen we meteen af dat de eigenwaarden zijn: -1, -3, -5, -7.

   Eigenvektoren bij eigenwaarde -1 zijn $a_0 \cdot 1$ met $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$.

   Eigenvektoren bij eigenwaarde -3 zijn $a_1 x$ met $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 \neq 0$.

   Eigenvektoren bij eigenwaarde -5 zijn $a_0(1 - 2x^2)$ met $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$.

   Eigenvektoren bij eigenwaarde -7 zijn $a_1(x - \frac{2}{3}x^3)$ met $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 \neq 0$.

0.10

Opgave

Zij Pol_3 de lineaire ruimte van alle polynomen van graad ≤ 3 met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. Neem de operator van Legendre:

$$(D_{\text{Leg}}(f))(x) := (1-x^2)f''(x) - 2xf'(x)$$

1. Laat zien dat als f in Pol_3 zit, dan is ook $D_{\text{Leg}}(f) \in \mathsf{Pol}_3$
2. Geef de matrix van D_{Leg} t.o.v. de basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ van Pol_3.
3. Bepaal de eigenwaarden en eigenvektoren van de lineaire operator D_{Leg} op de lineaire ruimte Pol_3 m.b.v. de matrix uit het vorige onderdeel.

Uitwerking

(a) Als f een polynoom van graad ≤ 3 is, dan zijn zowel $(1-x^2)f''$ als $2xf'$ polynomen van graad ≤ 3. Dus $D_{\text{Leg}}(f)$ is ook een polynoom van graad ≤ 3, m.a.w. $D_{\text{Leg}}(f) \in \mathsf{Pol}_3$.

(b) De i^{de} kolom van de gevraagde matrix is het "beeld" van de i^{de} basisfunctie onder de "afbeelding" D_{Leg}. Er geldt $D_{\text{Leg}}1 = 0$. Dus de eerste kolom van de gevraagde matrix is $(0,0,0,0)^T$. Verder geldt er $D_{\text{Leg}}x = -2x$, $D_{\text{Leg}}x^2 = 2 - 6x^2$ en $D_{\text{Leg}}x^3 = 6x - 12x^3$. De gevraagde matrix wordt dus:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

(c) De eigenwaarden van A zijn 0, -2, -6 en -12 (A is een bovendriehoeksmatrix, dus de eigenwaarden staan op de diagonaal), met bijbehorende eigenvectoren $(1,0,0,0)^T$, $(0,1,0,0)^T$, $(1,0,-3,0)^T$ en $(0,3,0,-5)^T$ resp.. D.w.z., D_{Leg} heeft als eigenwaarden 0, -2, -6 en -12 met bijbehorende eigenfuncties 1, x, $1-3x^2$ en $3x-5x^3$.

0.11

Opgave

Neem voor een positief reëel getal P de lineaire ruimte $C^\infty_{P-\text{per,even}}$ bestaande uit alle even P-periodieke reëelwaardige funkties op $\mathbb{R}$, die willekeurig vaak differentieerbaar zijn.

1. Laat zien dat als f in $C^\infty_{P-\text{per,even}}$ zit, dan zit ook f'' in $C^\infty_{P-\text{per,even}}$.

2. Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenfunkties voor de operator

$$D^2 : C^\infty_{P-\text{per,even}} \longrightarrow C^\infty_{P-\text{per,even}}\,, \qquad D^2(f) = f''.$$

Uitwerking

(vergelijk met voorbeelden 4 en 5 op blz 25; merk op dat $C^\infty_{\text{P}-\text{per,even}}(\mathbb{R}) = C^\infty_{\text{P}-\text{per}}(\mathbb{R}) \cap C^\infty_{\text{even}}(\mathbb{R})$ en dat $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f^{(k)} \in C^\infty(\mathbb{R})$ voor alle k ($f^{(k)}$ is de k^{de} afgeleide van f)).

(a) Stel $f \in C^\infty_{\text{P}-\text{per}}(\mathbb{R})$, dan geldt per definitie $f(x) = f(x+P)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Beide kanten differentiëren geeft $f'(x) = f'(x+P)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ (ofwel $f' \in C^\infty_{\text{P}-\text{per}}(\mathbb{R})$). Nog een keer differentiëren geeft $f''(x) = f''(x+P)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, ofwel ook $f'' \in C^\infty_{\text{P}-\text{per}}(\mathbb{R})$.
Stel nu $f \in C^\infty_{\text{even}}(\mathbb{R})$, dan geldt per definitie $f(x) = f(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Beide kanten differentiëren geeft $f'(x) = -f'(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ (ofwel $f' \in C^\infty_{\text{oneven}}(\mathbb{R})$). Nog een keer differentiëren geeft $f''(x) = f''(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, ofwel ook $f'' \in C^\infty_{\text{even}}(\mathbb{R})$.
Uit het bovenstaande concluderen we dat als f in $C^\infty_{\text{P}-\text{per,even}}(\mathbb{R})$ zit, dan zit ook f'' in $C^\infty_{\text{P}-\text{per,even}}(\mathbb{R})$.

(b) Vb. 5 (blz.25) laat zien dat D^2 op de ruimte $C^\infty_{\text{P}-\text{per}}(\mathbb{R})$ slechts eigenwaarden van de vorm $-\frac{4\pi^2k^2}{P^2}$ heeft met bijbehorende eigenruimten opgespannen door de twee bijbehorende eigenfuncties $\cos(\frac{2\pi k}{P}x)$ en $\sin(\frac{2\pi k}{P}x)$.
Beperk D^2 nu verder tot de deelruimte van P-periodieke even functies $C^\infty_{\text{P}-\text{per,even}}(\mathbb{R}) \subset C^\infty_{\text{P}-\text{per}}$. Voorbeeld 4 (blz.25) laat zien dat alle bovengenoemde eigenwaarden $-\frac{4\pi^2k^2}{P^2}$ nog steeds eigenwaarden van D^2 zijn, maar de bijbehorende eigenruimten worden nu alle 1-dimensionaal, opgespannen door de (bijbehorende) eigenfuncties $\cos(\frac{2\pi k}{P}x)$ (merk op dat dit geldt ook voor $k = 0$).

0.12

Opgave

Neem voor een positief reëel getal P de lineaire ruimte $C^{\infty}_{P-\text{per,oneven}}$ bestaande uit alle oneven P-periodieke reëelwaardige funkties op $\mathbb{R}$, die willekeurig vaak differentieerbaar zijn.

1. Laat zien dat als $f \in C^{\infty}_{P-\text{per,oneven}}$, dan zit ook f'' in $C^{\infty}_{P-\text{per,oneven}}$.
2. Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenfunkties voor de operator

$$D^2 : C^{\infty}_{P-\text{per,oneven}} \longrightarrow C^{\infty}_{P-\text{per,oneven}}, \qquad D^2(f) = f''.$$

Uitwerking

(a) Stel nu $f \in C^{\infty}_{\text{oneven}}(\mathbb{R})$, dan geldt per definitie $f(x) = -f(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Beide kanten differentiëren geeft $f'(x) = f(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ (ofwel $f' \in C^{\infty}_{\text{even}}(\mathbb{R})$). Nog een keer differentiëren geeft $f''(x) = -f''(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, ofwel ook $f'' \in C^{\infty}_{\text{oneven}}(\mathbb{R})$.
Net als in de vorige opgave is f'' ook P-periodiek. Uit het bovenstaande concluderen we dat als f in $C^{\infty}_{\text{P-per,oneven}}(\mathbb{R})$ zit, dan zit ook f'' in $C^{\infty}_{\text{P-per,oneven}}(\mathbb{R})$.
(b) Analoog aan vb. 4 (blz.25), krijgen we de volgende oplossingen in $C^{\infty}_{\text{oneven}}(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} c\sinh(x\sqrt{\lambda}) & \text{als} & \lambda > 0 \\ cx & \text{als} & \lambda = 0 \\ c\sin(x\sqrt{-\lambda}) & \text{als} & \lambda < 0 \end{array}$$

Hiermee concluderen we, net als in de vorige opgave, dat D^2 op de (deel)ruimte van P-periodieke oneven functies $C^{\infty}_{\text{P-per,oneven}}(\mathbb{R})$ slechts eigenwaarden van de vorm $-\frac{4\pi^2k^2}{P^2}$ heeft, echter met $k \neq 0$ en met bijbehorende (1-dimensionaal) eigenruimten opgespannen door de (bijbehorende) eigenfuncties $\sin(\frac{2\pi k}{P}x)$.

0.13

Opgave

Voor ieder geheel getal $n \geq 0$ wordt het Hermite polynoom $H_n(x)$ eenduidig bepaald door de volgende drie eisen

- $H_n(x)$ is een polynoom van graad n
- De coëfficiënt van x^n in $H_n(x)$ is 2^n
- $H_n''(x) - 2xH_n'(x) = -2nH_n(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

1. Ga na dat uit $H_{n+1}''(x) - 2xH_{n+1}'(x) = -(2n+2)H_{n+1}(x)$ volgt
   $H_{n+1}'''(x) - 2xH_{n+1}''(x) = -2nH_{n+1}'(x)$
2. Laat zien dat voor $n \geq 0$ het polynoom $\frac{1}{2n+2}H_{n+1}'(x)$ voldoet aan de bovenstaande drie eisen die $H_n(x)$ karakteriseren.

   Concludeer:
   $$H_{n+1}'(x) = (2n+2)H_n(x) \qquad \text{voor } \ n \geq 0.$$
3. Laat zien dat voor $n \geq 2$ het polynoom
   $2xH_{n-1}(x) - (2n-2)H_{n-2}(x)$ voldoet aan de bovenstaande drie eisen die $H_n(x)$ karakteriseren.

   Concludeer:
   $$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - (2n-2)H_{n-2}(x) \qquad \text{voor } \ n \geq 2.$$
4. Bereken $H_2(x)$, $H_3(x)$, $H_4(x)$, $H_5(x)$ uitgaande van
   $H_0(x) = 1$ en $H_1(x) = 2x$.

Uitwerking

(a) Per definitie van het Hermite polynoom $H_{n+1}(x)$ geldt er:

$$H_{n+1}''(x) - 2xH_{n+1}'(x) = -(2n+2)H_{n+1}(x)$$

Beide kanten differentiëren (gebruik maken van produktregel):

$$H_{n+1}'''(x) - 2xH_{n+1}''(x) - 2H_{n+1}'(x) = -(2n+2)H_{n+1}'(x)$$

ofwel:

$$H_{n+1}'''(x) - 2xH_{n+1}''(x) = -2nH_{n+1}'(x)$$

(b) Ten eerste, $H_{n+1}(x)$ is een $(n+1)^{de}$ graads polynoom, dus $\frac{1}{2n+2}H_{n+1}'(x)$ is een n^{de} graads polynoom. Ten tweede, de coëfficiënt van x^{n+1} in $H_{n+1}(x)$ is 2^{n+1}, dus de coëfficiënt van x^n in $\frac{1}{2n+2}H_{n+1}'(x)$ is 2^n $(= \frac{1}{2n+2}(n+1)2^{n+1})$. Ten derde, onderdeel (a) geeft:

$$\frac{1}{2n+2}H_{n+1}'''(x) - 2x\frac{1}{2n+2}H_{n+1}''(x) = -2n\frac{1}{2n+2}H_{n+1}'(x)$$

Dus, $\frac{1}{2n+2}H_{n+1}'(x)$ is het n^{de} Hermite polynoom $H_n(x)$ (wegens de uniciteit van Hermite polynomen). M.a.w.:

$$H_{n+1}'(x) = (2n+2)H_n(x)$$

(c) Ten eerste is het polynoom $[2xH_{n-1}(x) - (2n-2)H_{n-2}(x)]$ van graad n (= graad van $H_{n-1} + 1$). Ten tweede is de coëfficiënt van x^n daarin 2^n $(= 2 \cdot 2^{n-1})$. Verder geldt er:

$$[2xH_{n-1}(x) - (2n-2)H_{n-2}(x)]' = [2H_{n-1}(x) + 2xH_{n-1}'(x) - (2n-2)H_{n-2}'(x)]$$

en

$$[2xH_{n-1}(x) - (2n-2)H_{n-2}(x)]'' = [4H'_{n-1}(x) + 2xH''_{n-1}(x) - (2n-2)H''_{n-2}(x)]$$

Dus, er geldt ten slotte:

$$\begin{aligned}
&2x[2xH_{n-1}(x) - (2n-2)H_{n-2}(x)]' - [2xH_{n-1}(x) - (2n-2)H_{n-2}(x)]'' \\
= \quad & 2x[2H_{n-1}(x) + 2xH'_{n-1}(x) - (2n-2)H'_{n-2}(x)] \\
& \quad -[4H'_{n-1}(x) + 2xH''_{n-1}(x) - (2n-2)H''_{n-2}(x)] \\
= \quad & 4xH_{n-1}(x) + 2x[2xH'_{n-1}(x) - H''_{n-1}(x)] \\
& \quad -(2n-2)[2xH'_{n-2}(x) - H''_{n-2}(x)] - 4H'_{n-1}(x) \\
= \quad & 4xH_{n-1}(x) + 2x[2(n-1)H_{n-1}(x)] - (2n-2)[2(n-2)H_{n-2}(x)] \\
& \quad -4(2n-2)H_{n-2}(x) \\
= \quad & 2n[2xH_{n-1}(x) - (2n-2)H_{n-2}(x)]
\end{aligned}$$

M.a.w., voor $n \geq 2$ is $[2xH_{n-1}(x) - (2n-2)H_{n-2}(x)]$ het n^{de} Hermite polynoom $H_n(x)$, ofwel:

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - (2n-2)H_{n-2}(x) \quad , \quad n \geq 2$$

(d) Gebruik maken van onderdeel (c), vinden we achtereenvolgens:

$$\begin{aligned}
&H_2(x) = 4x^2 - 2\,, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x\,, \quad H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12\,, \\
&H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x
\end{aligned}$$

0.14

Opgave

Het *standaard inprodukt* op $\mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Ga na dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

Uitwerking

$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ met v_1 en v_2 reële getallen.
symmetrie: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 = w_1 v_1 + w_2 v_2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$
additiviteit: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle (u_1, u_2), (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \rangle = u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_1 w_1 + u_2 w_2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
homogeniteit: $\langle r\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle (rv_1, rv_2), (w_1, w_2) \rangle = rv_1 w_1 + rv_2 w_2 = r\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
positiviteit: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = v_1^2 + v_2^2 > 0$ als $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

0.15

Opgave

Het *standaard inprodukt* op $\mathbb{C}^2$ wordt gegeven door

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = v_1 \overline{w_1} + v_2 \overline{w_2}.$$

Ga na dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

Uitwerking

$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ met v_1 en v_2 complexe getallen.
symmetrie: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 \overline{w_1} + v_2 \overline{w_2} = \overline{w_1 \overline{v_1} + w_2 \overline{v_2}} = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$
additiviteit:$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle (u_1, u_2), (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \rangle = u_1 \left(\overline{v_1 + w_1} \right) + u_2 \left(\overline{v_2 + w_2} \right) = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + u_1 \overline{w_1} + u_2 \overline{w_2} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
homogeniteit: $\langle r\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = r v_1 \overline{w_1} + r v_2 \overline{w_2} = r \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
positiviteit: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = v_1 \overline{v_1} + v_2 \overline{v_2} = |v_1|^2 + |v_2|^2 > 0$ als $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

0.16

Opgave

Definieer voor $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{R}$

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = 2v_1w_1 + 3v_2w_2 - v_1w_2 - v_2w_1.$$

Ga na dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

Uitwerking

$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ met v_1 en v_2 reële getallen.
symmetrie: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 2v_1w_1 + 3v_2w_2 - v_1w_2 - v_2w_1 = 2w_1v_1 + 3w_2v_2 - w_1v_2 - w_2v_1 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$
additiviteit: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = 2u_1 (v_1 + w_1) + 3u_2 (v_2 + w_2) - u_1 (v_2 + w_2) - u_2 (v_1 + w_1) = 2u_1v_1 + 3u_2v_2 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_1w_1 + 3u_2w_2 - u_1w_2 - u_2w_1 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
homogeniteit: $\langle r\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 2rv_1w_1 + 3rv_2w_2 - rv_1w_2 - rv_2w_1 = r\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
positiviteit: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 2v_1^2 + 3v_2^2 - 2v_1v_2 = (v_1 - v_2)^2 + v_1^2 + 2v_2^2 > 0$ als $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

0.17

Opgave

Neem de lineaire ruimte $C^0([-1,1])$ van alle continue reëelwaardige funkties op het interval $[-1,1]$. Definieer voor $f,g \in C^0([-1,1])$

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Ga na dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

Uitwerking

symmetrie: $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)dx = \langle g,f\rangle$
additiviteit: $\langle f,g+h\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\left(g(x)+h(x)\right)dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)h(x)dx = \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle$
homogeniteit: $\langle rf,g\rangle = \int_{-1}^{1} rf(x)g(x)dx = r\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = r\langle f,g\rangle$
positiviteit: $\langle f,f\rangle = \int_{-1}^{1} f^2(x)dx > 0$ als $f \neq 0$ (Stel $\exists c \in [-1,1]$ zodanig dat $f(c) = a \neq 0 \Rightarrow f^2(c) = a^2 > 0$. Aangezien f^2 continu is (want f is continu), is er een $\epsilon > 0$ zodanig dat $f^2(x) > \frac{a^2}{2} \quad \forall x \in [c-\epsilon, c+\epsilon]$ (Als c gelijk is aan -1 of 1 is, kies dan respectievelijk het interval $[-1,-1+2\epsilon]$, $[1-2\epsilon,1]$) $\Rightarrow \int_{-1}^{1} f^2(x)dx \geq 2\epsilon\frac{a^2}{2} = a^2\epsilon > 0$)

0.18

Opgave

Neem de lineaire ruimte $C^0([-1,1])$ van alle continue reëelwaardige funkties op het interval $[-1,1]$. Definieer voor $f, g \in C^0([-1,1])$

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\sqrt{1-x^2}dx.$$

Ga na dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

Uitwerking

symmetrie:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\sqrt{1-x^2}dx = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)\sqrt{1-x^2}dx = \langle g, f\rangle$$

additiviteit:

$$\begin{aligned}\langle f, g+h\rangle &= \int_{-1}^{1} f(x)\left(g(x)+h(x)\right)\sqrt{1-x^2}dx \\ &= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\sqrt{1-x^2}dx + \int_{-1}^{1} f(x)h(x)\sqrt{1-x^2}dx \\ &= \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle\end{aligned}$$

homogeniteit:

$$\langle rf, g\rangle = \int_{-1}^{1} rf(x)g(x)\sqrt{1-x^2}dx = r\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\sqrt{1-x^2}dx = r\langle f, g\rangle$$

positiviteit: $\langle f, f\rangle = \int_{-1}^{1} f^2(x)\sqrt{1-x^2}dx > 0$ als $f \neq 0$. Stel $\exists c \in [-1,1]$ zodanig dat $f(c) = a \neq 0 \Rightarrow f^2(c) = a^2 > 0$. Aangezien f^2 continu is (want f is continu), is er een $\epsilon > 0$ zodanig dat $f^2(x) > \frac{a^2}{2} \quad \forall x \in [c-\epsilon, c+\epsilon]$ (Als c -1 of 1 is, kies dan respectievelijk het interval $[-1, -1+2\epsilon]$, $[1-2\epsilon, 1]$)$\Rightarrow$ Op dat interval geldt: $f^2(x)\sqrt{1-x^2} \geq \frac{a^2}{2}\sqrt{1-x^2}$ (want $\sqrt{1-x^2} \geq 0 \quad \forall x \in [-1,1]$). De functie $\sqrt{1-x^2}$ is een continue functie op dit interval, en midden in dit interval, noem dit punt d, ($d = c$ als $c \neq \pm 1$) is $\sqrt{1-x^2} > 0$. Dus is er een δ met $\epsilon > \delta > 0$ zodanig dat $\sqrt{1-x^2} > \frac{\sqrt{1-d^2}}{2} > 0 \quad \forall x \in [d-\delta, d+\delta]$. $\Rightarrow \int_{-1}^{1} f^2(x)\sqrt{1-x^2}dx \geq \int_{d-\delta}^{d+\delta} \frac{a^2}{2}\frac{\sqrt{1-d^2}}{2}dx > \frac{a^2}{2}\frac{\sqrt{1-d^2}}{2}2\delta > 0$.

0.19

Opgave

Neem in de lineaire ruimte $C^0(\mathbb{R})$ bestaande uit alle continue reëelwaardige funkties op $\mathbb{R}$ de lineaire deelruimte

$$V = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \mid f(x) = \mathcal{O}e^{x^2/3} \quad \text{voor } |x| \to \infty\}.$$

Definieer voor $f, g \in V$

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx.$$

Laat zien dat deze oneigenlijke integraal convergeert.
Laat zien dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

Uitwerking

$f \in V \Rightarrow \exists c > 0, M > 0$ zodanig dat $|f(x)| \leq ce^{\frac{x^2}{3}}$ als $|x| > M$.
$g \in V \Rightarrow \exists d > 0, N > 0$ zodanig dat $|f(x)| \leq de^{\frac{x^2}{3}}$ als $|x| > N$.
Definieer nu $P = \max\{M, N\}$ dan geldt:

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx \\
&= \int_{-\infty}^{-P} f(x)g(x)e^{-x^2}dx + \int_{-P}^{P} f(x)g(x)e^{-x^2}dx + \int_{P}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{-P} cd^2e^{-\frac{x^2}{3}}dx + \int_{-P}^{P} f(x)g(x)e^{-x^2}dx + \int_{P}^{\infty} cd^2e^{-\frac{x^2}{3}}dx < \infty.
\end{aligned}$$

Dus de oneigenlijke integraal convergeert.
symmetrie: $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)e^{-x^2}dx = \langle g, f\rangle$
additiviteit:

$$\begin{aligned}
\langle f, g + h\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(g(x) + h(x)\right)e^{-x^2}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)e^{-x^2}dx = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle
\end{aligned}$$

homogeniteit:

$$\langle rf, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} rf(x)g(x)e^{-x^2}dx = r\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx = r\langle f, g\rangle$$

positiviteit: $\langle f, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)e^{-x^2}dx > 0$ als $f \neq 0$. Stel $\exists c \in \mathbf{R}$ zodanig dat $f(c) = a \neq 0 \Rightarrow \exists\epsilon > 0$ zodanig dat $f^2(x)e^{-x^2} > \frac{a^2}{2}e^{-c^2} \quad \forall x \in [c - \epsilon, c + \epsilon]$ (want de functie $f^2(x)e^{-x^2}$ is continu.)$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)e^{-x^2}dx \geq \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f^2(x)e^{-x^2} \geq \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} \frac{a^2}{2}e^{-c^2}dx = \epsilon a^2e^{-c^2} > 0$

0.20

Opgave

Neem de ruimte $L^2_{\text{cont}}(\mathbb{R})$ van alle continue kwadratisch integreerbare reële funkties op $\mathbb{R}$

$$L^2_{\text{cont}}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}) \;\middle|\; \text{de integraal } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \;\text{ convergeert} \right\}$$

1. Laat zien dat als $f, g \in L^2_{\text{cont}}(\mathbb{R})$ dan convergeert de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$.

2. Laat zien dat de formule $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$ een inprodukt definieert op de lineaire ruimte $L^2_{\text{cont}}(\mathbb{R})$.

Uitwerking

(a) Merk op dat $L^2_{\text{cont}}(\mathbb{R}) = W_3$, met W_3 zoals in opgave 7. We hebben gezien dat dit een lineaire ruimte is. Als f en g in $L^2_{\text{cont}}(\mathbb{R})$, dan is dus ook $f + g \in L^2_{\text{cont}}(\mathbb{R})$.
Verder $|f(x) + g(x)|^2 = (f(x) + g(x))^2 = |f(x)|^2 + 2f(x)g(x) + |g(x)|^2$, dus als $f, g \in L^2_{\text{cont}}(\mathbb{R})$ dan convergeren $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx$
en $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) + g(x)|^2 dx$ en dus ook $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$.
(b) In onderdeel (a) hebben we gezien dat dit een goed gedefinieerd inprodukt is. Het is een functie van $L^2_{\text{cont}}(\mathbb{R}) \times L^2_{\text{cont}}(\mathbb{R})$ naar $\mathbb{R}$. We moeten nu nog laten zien dat dit inprodukt voldoet aan de eisen van een inprodukt. Dit is geheel analoog aan opgave 17 (alle optredende oneigenlijke integralen convergeren).

Opgave 26:

0.21

Opgave

Zij Pol_3 de lineaire ruimte van alle polynomen van graad ≤ 3 met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. Neem op deze ruimte het inprodukt gegeven door

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx \qquad \text{voor} \quad f, g \in \mathsf{Pol}_3.$$

1. Ga na dat voor alle $n, m \in \{0, 1, 2, 3\}$ geldt

$$\langle x^n, x^m\rangle = (n+m)!$$

   N.B. de Gamma-funktie is gedefinieerd door $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\,dt$. Gebruik de bekende formule $\Gamma(k+1) = k!$ voor ieder geheel getal $k \geq 0$.

2. Bepaal polynomen $\ell_n(x)$ voor $n = 0, 1, 2, 3$ zo dat

$$\begin{array}{rcll} \text{graad}\,\ell_n(x) & = & n & \\ \langle \ell_n(x), x^m\rangle & = & 0 & \quad \text{als} \quad m < n \end{array}$$

3. Vergelijk de polynomen $\ell_n(x)$ met de Laguerre polynomen $L_n(x)$ uit de vorige opgave.

Uitwerking

(analoog aan opgave 22)

(a) Er geldt:

$$\langle x^n, x^m\rangle = \int_0^\infty x^{n+m}e^{-x}dx = \Gamma(n+m+1) = (n+m)!$$

Dit geldt voor alle n, $m \geq 0$, dus i.h.b. voor n, $m \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(b) Analoog aan opgave 22, vinden we achtereenvolgens:

$$\begin{array}{rcll} l_0(x) & = & a_0 & \\ l_1(x) & = & a_0(1-x) & (a_0 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_0) \\ l_2(x) & = & a_0(1 - 2x + \frac{1}{2}x^2) & (a_0 + a_1 + 2a_2 = 0\ ,\ a_0 + 2a_1 + 6a_2 = 0 \\ & & & \Rightarrow a_1 = -2a_0\ ,\ 4a_2 = -a_1) \\ l_3(x) & = & a_0(1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3) & (a_0 + a_1 + 2a_2 + 6a_3 = 0\ , \\ & & & a_0 + 2a_1 + 6a_2 + 24a_3 = 0\ , \\ & & & 2a_0 + 6a_1 + 24a_2 + 120a_3 = 0 \\ & & & \Rightarrow a_1 = -3a_0\ ,\ 4a_2 = -2a_1\ ,\ 9a_3 = -a_2) \end{array}$$

(c) Vergelijk met de Laguerre polynomen uit opgave 25(c), dan zien we dat $l_n(x) = a_0 L_n(x)$ (met $l_n = a_0 + \cdots$). Dit komt doordat Laguerre polynomen zijn zo genormaliseerd dat ze de constante term $a_0 = 1$ hebben.

Opgave 33:

0.22

Opgave

We nemen de lineaire ruimte $C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ bestaande uit de willekeurig vaak differentieerbare begrensde reëelwaardige funkties op het open interval $]-1,1[$ waarvoor ook alle afgeleiden $f^{(j)}$ begrensde funkties op $]-1,1[$ zijn.

1. Laat zien dat de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ convergeert.
   N.B. Je hoeft deze integraal *niet* te berekenen!
2. Laat zien dat voor alle $f,g\in C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^4}}dx$ convergeert.

Voor $f,g\in C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ definiëren we nu

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^4}}dx.$$

1. Laat zien dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.
   Opmerking: Je mag hier zonder bewijs gebruiken: als h een continue funktie is op $]-1,1[$ zodat $h(x)\geq 0$ voor alle $x\in]-1,1[$ en zodat $\int_{-1}^{1}h(x)dx$ convergeert en $\int_{-1}^{1}h(x)dx=0$, dan is de funktie h constant gelijk aan 0.
   Geef wel duidelijk aan waar en hoe je deze opmerking gebruikt.

Neem de operator:

$$(Df)(x)=(1-x^4)f''(x)-2x^3f'(x)\qquad\text{voor}\quad f\in C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[).$$

Je mag zonder bewijs gebruiken dat D een lineaire afbeelding is van
$C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ naar $C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$.

1. Laat zien dat D een symmetrische operator is voor het gegeven inprodukt.
   Aanwijzing: Wat is de afgeleide van $\sqrt{1-x^4}$?

Uitwerking

1. We moeten laten zien dat beide integralen $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ en $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ convergeren.
   Merk op $1-x^4=(1-x)(1+x)(1+x^2)$ en dus

   $$\lim_{x\downarrow -1}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}=\lim_{x\downarrow -1}\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x^2)}}=\frac{1}{2}.$$

   Bovendien weten we dat de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ convergeert (want $\lim_{p\downarrow -1}\int_p^0\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=\lim_{p\downarrow -1}2\sqrt{1+x}\Big|_{x=p}^{x=0}=2$). Hieruit volgt dat de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ convergeert.
   Op vrijwel identieke wijze (door te vergelijken met de funktie $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$) kan men bewijzen dat de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ convergeert.

2. Bekijk $f, g \in C^{\infty}_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$. Dan zijn er constanten K, M zo dat voor alle $x \in]-1,1[$ geldt $|f(x)| < K$ en $|g(x)| < M$ en dus

$$\left|\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^4}}\right| < \frac{KM}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Volgens onderdeel a. convergeert de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. De Majorantie Stelling leert nu dat ook de oneigenlijke integraal
$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^4}} dx$ convergeert.

3. Dit gaat net als Opgave 29c:

   - Voor alle $f, g \in C^{\infty}_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ is
     $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{g(x)f(x)}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \langle g, f\rangle$
   - Voor alle $f, g \in C^{\infty}_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ en $a \in \mathbb{R}$ is
     $\langle af, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{af(x)g(x)}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = a\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = a\langle f, g\rangle$
   - Voor alle $f, g, h \in C^{\infty}_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ is
     $\langle f+h, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{(f(x)+h(x))g(x)}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^4}}\, dx \;+\; \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$
     $= \langle f, g\rangle \;+\; \langle h, g\rangle$
   - Voor alle $f \in C^{\infty}_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ en alle $x \in]-1,1[$ is $\frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^4}} \geq 0$ en dus ook $\langle f, f\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^4}}\, dx \geq 0$.

     Veronderstel $\langle f, f\rangle = 0$. Dan voldoet de funktie h, gegeven door $h(x) = \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^4}}$ aan de in de opmerking genoemde voorwaarden en is dus constant gelijk aan 0. Hieruir volgt dat ook de funktie f constant gelijk aan 0 is.

4. Voor alle $f, g \in C^{\infty}_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ is

$$\begin{aligned}
\langle Df, g\rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{((1-x^4)f''(x) - 2x^3 f'(x))g(x)}{\sqrt{1-x^4}}\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x^4}f''(x) + \frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}f'(x)\right) g(x)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x^4}f'(x)\right)' g(x)\, dx \\
&= \left[\sqrt{1-x^4}f'(x)g(x)\right]_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^4}f'(x)g'(x)\, dx \\
&= -\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^4}f'(x)g'(x)\, dx
\end{aligned}$$

Deze laatste uitdrukking is symmetrisch in f en g. Zo blijkt

$$\langle Df, g\rangle = \langle f, Dg\rangle.$$

Dus is D een symmetrische operator t.a.v. het gegeven inprodukt.

Opgave 34:

0.23

Opgave

Zij V een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ voorzien van een inprodukt $\langle .,. \rangle$. Zij W een lineaire deelruimte van V en v een element van V. Stel $u \in W$ is zo dat voor iedere $w \in W$ geldt $\| v - u \| \leq \| v - w \|$.

1. Bewijs dat voor elke $z \in W$ geldt $\langle v - u, z \rangle = 0$.

   Illustreer dit met een tekening voor het geval $\dim V = 3$ en $\dim W = 2$.

   Aanwijzing voor het bewijs: Voor vaste $z \in W$ en variabele $t \in \mathbb{R}$ is $\| v - u - tz \|^2$ een funktie van t. Wat is de afgeleide van deze funktie? Waar is de funktie minimaal?

2. Veronderstel dat $e_1, \ldots, e_n$ een basis van W is met de eigenschap $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ als $i \neq j$.

   Bepaal de coordinaten van u t.o.v. deze basis.

Uitwerking

(a) Beschouw de volgende functie:

$$\begin{aligned} g(t) &= \|v - u - tz\|^2 = \langle v - u - tz, v - u - tz \rangle \\ &= \langle v - u, v - u \rangle - 2t\langle v - u, z \rangle + t^2 \langle z, z \rangle \end{aligned}$$

(Hierbij is de symmetrie, de additiviteit en de homogeniteit van het inproduct gebruikt.) Er geldt:

$$\frac{d}{dt} g(t) = -2\langle v - u, z \rangle + 2t\langle z, z \rangle;$$

dus $g(t)$ heeft een extremum bij $\tilde{t} = \frac{\langle v-u,z \rangle}{\|z\|^2}$. Dit is een minimum omdat $\langle z, z \rangle$ altijd positief is (positiviteit van het inproduct).

De aanname is dat $\|v-u\| \leq \|v-w\|$ geldt voor alle $w \in W$, dus in het bijzonder voor $w = u+\tilde{t}z$ (merk op dat uit $u \in W$ en $z \in W$ volgt $u + \tilde{t}z \in W$, omdat W een lineaire deelruimte is). Nu is enerzijds

$$\|v - u\|^2 \leq \|v - (u + \tilde{t}z)\|^2$$

en anderzijds

$$\begin{aligned} \|v - (u + \tilde{t}z)\|^2 &= \|v - u - \frac{\langle v - u, z \rangle}{\|z\|^2} z\|^2 \\ &= \langle v - u - \frac{\langle v - u, z \rangle}{\|z\|^2} z, v - u - \frac{\langle v - u, z \rangle}{\|z\|^2} z \rangle \\ &= \|v - u\|^2 - 2\frac{\langle v - u, z \rangle}{\|z\|^2} \langle v - u, z \rangle + \left(\frac{\langle v - u, z \rangle}{\|z\|^2} \right)^2 \langle z, z \rangle \\ &= \|v - u\|^2 - \frac{\langle v - u, z \rangle^2}{\|z\|^2} \\ &\leq \|v - u\|^2. \end{aligned}$$

Dus

$$\|v - u\|^2 = \|v - (u + \tilde{t}z)\|^2 = \|v - u\|^2 - \frac{\langle v - u, z \rangle^2}{\|z\|^2}$$

Hieruit volgt $\langle v - u, z \rangle = 0$ □

(b) Volgens (a) geldt: $\langle v-u,z\rangle = 0 \quad \forall z \in W$. Kies nu voor z de basisvector e_i. Dan geldt: $\langle v-u,e_i\rangle = 0 \Rightarrow \langle v,e_i\rangle - \langle u,e_i\rangle = 0 \Rightarrow \langle u,e_i\rangle = \langle v,e_i\rangle$
In het algemeen kunnen we een element $w \in W$ schrijven als $w = \sum_i w_i e_i$ waarbij de coördinaten w_i gegeven worden door: $w_i = \frac{\langle w,e_i\rangle}{\langle e_i,e_i\rangle}$ In dit geval kunnen we dus schrijven: $u = \sum_i \frac{\langle u,e_i\rangle}{\langle e_i,e_i\rangle} e_i = \sum_i \frac{\langle v,e_i\rangle}{\langle e_i,e_i\rangle} e_i$. Dus de coördinaten van u t.o.v deze basis worden gegeven door $u_i = \frac{\langle v,e_i\rangle}{\langle e_i,e_i\rangle}$