Oefententamen *Groepentheorie* (WISB221).

A. Henriques, Nov 2012.

Geef niet alleen anwoorden, maar bewijs al je beweringen.

Opgave 1 Zij $G := \mathrm{Isom}_+(D)$ de symmetrie groep van de regelmatige dodecahedron.
• Hoeveel elementen van order 2 zijn er in G? en van orde 3? en van orde 5?
• Hoeveel conjugatie classen van elementen van orde 5 zijn er in G?
• Laat zien dat G geen element van order 6 bevat.
• Zij $x, y \in G$ twee elementen van orde 5 zo dat $\langle x \rangle \neq \langle y \rangle$. Laat zien dat $\langle x, y \rangle = G$.

Opgave 2 Welke van de volgende beweringen juist zijn?

$$\mathbb{Z}_7^\times \cong \mathbb{Z}_6 \qquad \mathbb{Z}_8^\times \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \qquad \mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$$

$$(\mathbb{Q}_{>0}, \times) \cong (\mathbb{Q}, +) \qquad SO_2 \cong U_1$$

Opgave 3 Dewijs dat als G en groep is, en als $e_1, e_2 \in G$ alebij neutrale elementen zijn, dan $e_1 = e_2$.

Opgave 4 Geef een voorbeeld van een verzameling X met een binaire operatie $m : X \times X \to X$ zodat (X, m) wel en neutraal element heeft, maar niet associatief is.

Opgave 5 Zij $\pi, \sigma \in S_5$ twee elementen met $ord(\pi) = 5$ en $ord(\sigma) = 2$, en zij $G := \langle \pi, \sigma \rangle$. Bepaal welke van de volgende opties mogelijk zijn:

$$G \cong S_5 \qquad G \cong D_5 \qquad G \cong A_5 \qquad G \cong S_4$$

$$G \cong \mathbb{Z}_5 \qquad G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \qquad G \cong Q$$

Opgave 6 Is SO_n een normaal deelgroep van O_n?