Oefententamen *Functies en Reeksen* (WISB211). A. Henriques, Oct 2010

We gebruiken de notatie $\mathbb{R}_{>a}$ voor de verzameling $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.

Opgave 1 De functie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} :\to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y, z) = x^y \cdot |\sin(1/x)|^z$$

als x niet nul is, en $f(0, y, z) = 0$. Wat is de domein van definitie van de functie $\partial f/\partial x$? (met uitleg)

Opgave 2 De totale afgeleide van een functie $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$Df = (3x^2y^2z, 2x^3yz, x^3y^2, 0).$$

Van welke form moet dan f zijn?
Laat zien (met volledig bewijs) dat er geen functie $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ bestaat waarvan de totale afgeleide door

$$Dg = (x^2y^2z, x^3yz, x^3y^2, 0).$$

is gegeven.

Opgave 3 Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie. Stel dat f' bestaat en is begrensd. Bewijs dat

$$\exists a > 0, \exists b > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| < a|x| + b.$$

Opgave 4 Geef een volledig bewijs dat de functie

$$f(t) := \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^t dx$$

continu is op $\mathbb{R}_{>-1}$.

Opgave 5 Onder welke algemene voorwarden kun je "differentieren onder het integraalteken"?

Opgave 6 Geef een voorbeeld van een functie $f \in \mathcal{C}^1(]0, 1[)$ die uniform continu is (met ε-δ bewijs), en waarvan de afgeleide onbegrensd is.

Opgave 7 De functies $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door $f_n(x) = a_n e^{-(x-b_n)^2}$, waarin $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rijen van getallen zijn.
- Bewijs dat "$f_n \to 0$ uniform op $\mathbb{R}$" equivalent is aan "$\lim a_n = 0$".
- Laat zien dat "$f_n \to 0$ uniform op $[0, 1]$" niet equivalent is aan "$\lim a_n = 0$".
- Geef een voorbeeld van rijen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zo danig dat

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n \qquad \forall x \in [0, 1].$$