Oefententamen voor *Functies en Reeksen* (WISB211). A. Henriques, Jan 2011.

Opgave 1 Stel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ixn} = f(x)$$

voor een bepaalde 2π-periodieke functie f. Stel $d_n = c_{2n}$. Druk dan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{ixn}$$

in termen van f uit.

Opgave 2 Zij $a \in [0, \pi^2]$ een constante. Zij

$$\begin{aligned} f_0(x) &:= \max(0, a - x^2) \\ f_n(x) &:= f_0(x - 2\pi n) \\ f(x) &:= \max_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x) \end{aligned}$$

Maak een schets van f. Bereken de Fourierreeks van f

Opgave 3 Zij

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n!+1} & \text{voor } n \text{ even} \\ 0 & \text{voor } n \text{ oneven} \end{cases}$$

Bewijs dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

een geheel analytische functie defineert.

Opgave 4 Zij a_n een convergente rij met limiet ongelijk aan 0 en b_n een willekeurige rij. Allebei zijn rijen van positieve reële getallen. Bewijs dat

$$\operatorname{limsup}(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \operatorname{limsup} b_n.$$

Opgave 5 Zij $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$ en $b \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Zij $c_n := a_n b_n$. Bewijs dat $c \in \ell^1(\mathbb{Z})$.